آموزشکده فنی شهید رجایی شیراز

جزوه درس

فیزیک پیش

علیرضا تورانی

مقدمه

جزوه حاضر به عنوان منبعی برای تدریس درس فیزیک پیش تعیین شده است . در جمع آوری وبیان مطالب سعی شـده ضـمن حفـظ هماهنگی وبیان کامل مطالب سادگی وروانی ان کاملا محفوظ بماند و برای آن که مطلب قابل فهم تر شود سعی شده در هر مورد سوال های ساده تا سطح متوسط ومشکل آورده شود. در آخر هر فصل نیز مسائل متناسب با فصل گنجانـده شـده تـا تمـرین درس را کامـل نماید.

طبیعی است که هیچ کاری خالی از اشکال نیست لذا از دانشجویان فرهیخته خواهشمندم که من را در جهت کامل نمودن کار بـا ارائـه نظرات خویش راهنمایی فرمائید.

فصل اول

اندازه گیری و بردارها

کمیت :

هر چیز قابل اندازه گیری را کمیت می نامیم . یک کمیت وقتی به طور دقیق قابل تعریف است که برای اندازه گیری آن روشی را ارائه دهیم.

در فیزیک کمیت ها را می توان از نقطه نظری به دو دوسته تقسیم بندی نمود.

الف) کمیت های اصلی وکمیت های فرعی

ب-)کمیت های نرده ای وکمیت های برداری

تقسیم بندی الف قرار دادی است در این قرار داد کمترین تعداد از کمیت های فیزیکی که بتوانیم کمیت های دیگر را بر حسب آن بیان وتعریف نمائیم ،انتخاب می شود کمیته استاندارد جهانی هفت کمیت را به عنوان کمیت اصلی انتخاب نموده است که عبارت اند از

طول L زمان T

جرم M مقدار ماده MOL

دما K شدت جریان الکتریکی A شدت روشنایی I

کمیت های فرعی را نیز می توان این طور تعریف کرد : کمیت هایی هستند که بر اساس کمیت های اصلی نوشته می شوند. برای واضح ترشدن مطلب مثالی می زنیم : فرض کنید شما مسافت بین منزل ودانشگاه را در مدت زمان دو ساعت طی می کنید . در صورتی که این فاصله 6 کیلو مترباشد، تندی متوسط در این جابجایی 3Km/m می باشد که از تقسیم مسافت 6Km به زمان 2h به دست می آید. می بینید که در این جا تندی(کمیت فرعی) بر اساس دو کمیت اصلی(مسافت و زمان) به دست می آید . از کمیت های فرعی دیگر می توان از شتاب نیرو وانرژی نام برد . بر اساس آنچه گفته شد. تعریف جدیدی را تحت عنوان دیمانسیون ویا معادله ابعادی بیان می کنیم

دیمانسیون یا معادله ابعادی :

رابطه که بین کمیت فرعی وکمیت های اصلی وجود دارد را در دیمانسیون یا معادله ابعادی گویند درمثال زیر این ارتباط برای چند کمیت فرعی نشان داده شده است .

سرعت $[V] = \frac{\text{طول}}{\text{زمان}}$ یا LT^{-1}

شتاب $[a] = \frac{\text{طول}}{(\text{زمان})^{2}}$ یا LT^{-2}

نیرو $[F] = [\text{جرم}]\,[\text{شتاب}] = MLT^{-2}$

یکا یا واحد :

برای اندازه گیری کمیت ها بعد از تعیین روشی برای اندازه گیری احتیاج به تعیین یکا داریم . مجموعه یکاهای کمیت های مختلف مجموعه ای به نام دستگاه اندازه گیری تشکیل می دهند از دستگاه های اندازه گیری معروف دستگاه M.K.S وc-g-s می باشد

دستگاه M.K.S به دلیلی محاسنی که دارد به عنوان دستگاه S.I یا دستگاه بین المللی آحاد انتخاب شده اسـت جـدول زیـر یکاهـای هفت کمیت اصلی را در S.I نشان می دهد.

طول	**زمان**	**دما**	**جرم**	**مقدار ماده**	**شدت جریان الکتریکی**	**شدت روشنایی**
m	s	K	Kg	mol	A	cd
متر	ثانیه	کلوین	کیلوگرم	مول	آمپر	شمع

کمیت های اسکالری کمیت های برداری :

همان طور که قبلا نیز اشاره شد ، تقسیم بندی دیگری نیز برای کمیت هاوجود دارد :

اسکالری نرده ای وبرداری .

کمیت های اسکالری : کمیت هایی هستند که فقط مقدار دارند مانند زمان .

کمیت های برداری : کمیت های هستند که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند مانند سرعت .

برای روشن شدن مزلب مثالی می زنیم طول قد کمیتی اسکالری است برای تعیین ان از جهت استفاده نمی نماییم . اما وقتی می گوییم شخصی 200 متر را به سمت منزل خود طی کرده کلمه به سمت معرف جهت جابجایی است. پس در جابجایی شخص باید علاوه بر مشخص کردن مقدار جایجایی جهت جایجایی را نیز مشخص نمود . به طور کلی برای مشخص کردن یک کمیت برداری باید مقـدار وجهت ان را مشخص نمود.

مطلب کلیدی در این بحث آن است که بدانیم برای کار کردن با کمیت های اسکالری عملیات جبری عادی کفایت می کنـد، در حـالی که عملیات ریاضی بردارها با آن متفاوت بوده و با در نظر گرفتن جهت انجام می گیرد . از آنجا که تعداد کمیت های برداری زیاد است بحث بردار ها وبه خصوص جمع تفریق وانواع ضرب آنها را در بخش دوم می آوریم .

تبدیل یکاها(واحد) :

مطلب دیگری که در فیزیک پایه به آن پرداخته می شود و **دانشجوی مهندسی** باید با آن آشنایی خوبی داشته باشد تبدیل یکا می باشد. اهمیت این مطلب از آنجا ناشی میشود که باید در جمع وتفریق از یکاهای یکسانی استفاده نمود به عبارت دیگر نمی توان در قســمتی از حل یک مسئله برای طول متر را به کار برد ودر قسمت دیگر از یکای دیگری مانند سانتیمتر استفاده نمود . برای کمیت های دیگـر این مطلب رابابد در نظر داشت . در عملیات ریاضی باید یکاهای کمیت ها یکسان باشد.

در انجام تبدیل یکا دقت کنید که فقط کافی است به جای یک یکا معادل آن را از یکای مورد نظر قرار دهیم . مثلا اگر بخواهیم 10M را به سانتی متر تبدیل کنیم کافی است به جای متر، 100CM قرار دهیم .

10m=(10)(100Cm)=100Cm

ویا اگر بخواهیم 20cm را به متر تبدیل کنیم :

20cm=20(/01)=0.20

مثال های دیگری از تبدیل یکا در این جا آورده می شود.:

2h=(2)(60min)=120 min

120min=120(60S)=720 S

$$20S = 20(\frac{1}{3600}h) = \frac{1}{180}h$$

به عنوان تمرین دیگر 20Km/h را به یکاهای (m/s) و(cm/s) و(mm/min) تبدیل می کنیم .

$$۲۰\frac{km}{h} = (۲۰)(\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}) = \frac{۵۰}{۹} m/s$$

$$۲۰(\frac{km}{h}) = (۲۰)(\frac{۱۰^{۵}cm}{۳۶۰۰s}) = \frac{۵۰۰۰۰}{۹} cm/s$$

$$۲۰(\frac{km}{h}) = (۲۰)(\frac{۱۰^{۶}mm}{۶۰min}) = \frac{۱۰^{۶}}{۳} mm/min$$

توجه کنید که از بین این یکاها که همگی از تقسیم یکای طول بر یکای زمان به دست می آید دو یکای ئm/s وcm/s معروف ترند وبقیه مصارف خاصی دارند.

مثال 1-1:

20km/h را به یکاهای $\frac{m}{h},\frac{cm}{h},\frac{cm}{\min},\frac{mm}{h}$ تبدیل کنید.

حل :

$$20\frac{km}{h}=(20)\frac{(1000m)}{h}=2\times10^{4}\frac{m}{h}$$

$$20\frac{km}{h}=(20)\frac{(10^{5}m)}{h}=2\times10^{6}\frac{cm}{h}$$

$$20\frac{km}{h}=(20)\frac{(10^{5}cm)}{(60\,min)}=\frac{1}{3}\times10^{5}\frac{cm}{min}$$

$$20\frac{km}{h}=(20)\frac{(10^{6}mm)}{h}=2\times10^{7}\frac{mm}{h}$$

مثال 1-2 :

$30\frac{km}{\min 2}$ را که یکای شتاب می باشد به یکاهای $\frac{cm}{s2},\frac{m}{s2}$ تبدیل نمایید.

حل :

$$30\frac{km}{min^{2}}=\frac{(30)(1000m)}{(60s)^{2}}=8/33\,m/s^{2}$$

$$30\frac{km}{[illegible]^{2}}=30\frac{(10^{5}cm)}{[illegible]^{2}}=833/3\,cm/s^{2}$$

مثال 1-3 :

$50\frac{g}{cm3}$ را بر حسب $\frac{kg}{m2}$:

حل :

$$50\frac{g}{cm^{3}}=50\frac{\frac{1}{1000}kg}{10^{-6}m^{3}}=5\times10^{4}\frac{kg}{m^{3}}$$

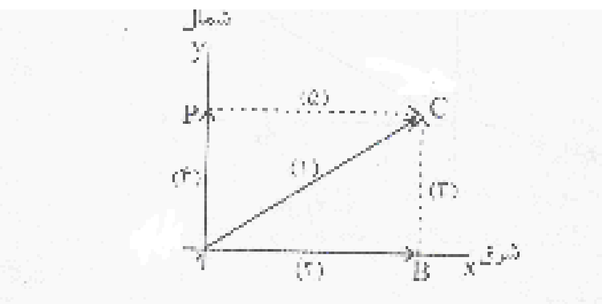
تصویر یک بردار :

همان طور که اشاره شد ، برای کار با کمیت های برداری مثل جابجایی وسرعت نیاز به آشنایی با جمع وتفریـق وروش آنـالیز بـردار داریم. مقدماتی ترین بحث در این مورد آشنایی با مفهوم بردار وتجزیه آن می باشد .

فرض کنید می خواهیم از تهران به شهری مانند شیراز برویم . برای این مسافرت همان طور که در شکل بیان شده است چند راه وجود دارد می توان این مسیر را مسیر را مستقیم با هواپیما طی کرد.(مسیر 1) یا آن که ابتدا مسیری را به سمت شرق حرکت کرده وسپس به سمت شمال رفت (مسیر 2 و3) ویا نه ابتدا به سمت شمال رفته وسپس به سمت شرق حرکت کرد .(مسیر 4و5) جابجـایی در هـر سه مسیر یکی می باشد.

$$\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{BC}=\vec{OD}+\vec{DC}$$

علامت پیکان علامت بردار است بردار را در حالت کلی با این علامت می شناسند.



بردار یکه :

برداری است که طول آن واحد یک است و جهت خاصی را نشان می دهد و آن را با

علامت ^ به جای پیکان در بالای حرف نشان می دهند. بر طبق قراداد $\hat{i}$بردار یکه درجهت مثبت محور x و $\hat{J}$ بردار یکه درجهت محور y و $\hat{k}$ بردار یکه درجهت محور z ها می باشد . با کمک بردارهای یکه می توان بردارها را نمایش داد.

$$\vec{OB} = OB\,\hat{i}, \qquad \vec{OD} = OD\hat{j}$$

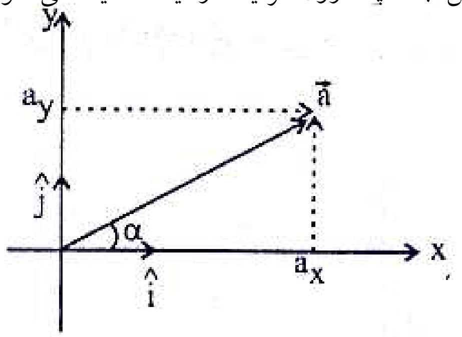
وبردار $\vec{OC}$را می توان نوشت :

$$\vec{OC} = OD\,\hat{i} + OB\hat{j}$$

OD را گاه مولفه oc درامتداد محور y و OBرا مولفه $\vec{OC}$ درامتداد محور x می گویند. برای درک بهتر بحث تصویر سازی بردارها به مثال زیر توجه نمایید:

فرض کنید آینه ای روی محور x ها وآینه دیگری روی محور y ها قرار دارد ونیز فرض کنسد oc میله ای باشد که یک سر آن در مبدا نقطه o وسر دیگر آن در نقطه c واقع باشد . در این جا آنچه درون هر یک از آینه ها دیده می شود تصویر یا مولفه oc میباشد. می خواهیم این مطلب را با روابط ریاضی بیان کنیم .

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$
$$a_x = a\cos\alpha$$
$$a_y = a\sin\alpha$$



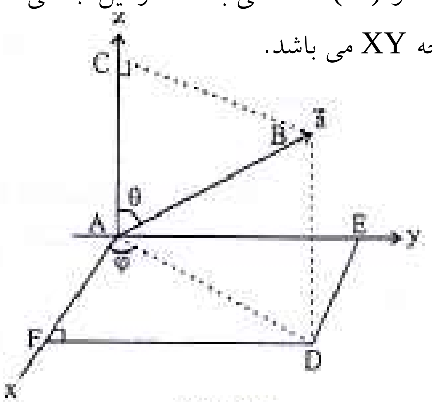
شکل (۲-۱)

تصویر کردن بردار در فضای سه بعدی : *(برای مطالعه)*

بردار به شکل مقابل را در فضای سه بعدی در نظر می گیریم :

بردار a دارای سه مولفه AF(ax) ومولفه AE(ay) و AF (az) می باشد. در این جا می خواهیم رابطه آنها را با طول بردار a و زوایای θ وφ بدانیم. AD تصویر A روی صفحه XY می باشد.

$$AD = a\sin\theta$$



شکل (۳-۱)

AC نیز تصویر بردار A روی محور Z است .

$$a_z = AC = a\cos\theta$$
$$a_x = AF = AD\cos\varphi$$
$$a_x = a\sin\theta\cos\varphi$$
$$a_y = AE = AD\sin\varphi$$
$$a_y = a\sin\theta\sin\varphi$$
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = a\sin\theta\cos\varphi\hat{i} + a\sin\theta\sin\varphi\hat{j} + a\cos\theta\hat{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

جمع وتفریق بردارها

بردار ها را می توان با دو روش به یکدیگر جمع نمود.

الف- روش هندسی یا ترسیمی ب- روش مولفه ای یا تحلیلی

الف- روش هندسی یا ترسیمی :

این روش خود شامل چند روش است، که در این جا دو روش معروف تر آن بیان می شود:

1- روش مثلث

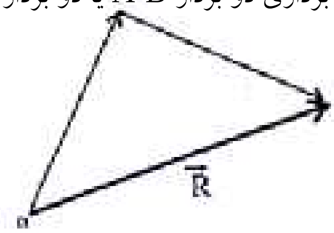
2- روش متوازی الاضلاع

دراین روش ها از روابط راضی کمتر استفاده میشود. هر چند این روابط وجود دارند و بیشتر سعی می شود از وسایل ترسیم برای به دست آوردن نتیجه جمع ویا زوایه ان با محور ها استفاده نمود.

الف- روش مثلث :

ابتدا بردار ها ی همسنگ را تعریف می نمایم .دو بردار را که هم اندازه وهم جهت باشند وراستاهای ان ها نیز موازی یکدیگر باشند ، هم سنگ می گویند . حال به مطلب اصلی یعنی جمع دو بردار بر می گردیم .

بردار $\vec{a}$ را از نقطه O هم سنگ با بردار اول رسم می کنیم ، از انتهای آن بردار $\vec{b}$ را هم سنگ با بردار دوم رسم می کنیم . برداری که نقطه O رابه انتهای بردار دوم وصل می کند برایند یا جمع برداری دو بردار A-B یا دو بردار اولیه می گویند.



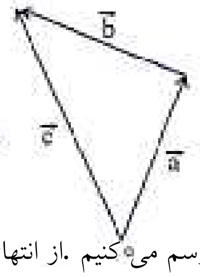
شکل (۴-۱)

برای به دست آوردن تفاضل دو بردار a و b نیز می توان از همین روش استاده نمود.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

این رابطه می گوید ، می توان بردار b– را که مساوی b و درخلاف جهت آن است را درنظر بگیریم وجمع آن رابا $\vec{a}$ بدست اوریم .

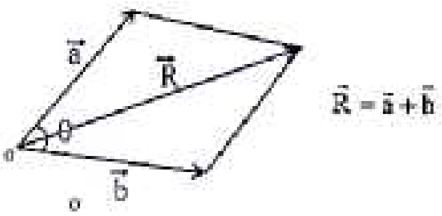
نکته مهم دراین جا این است که می توان روش مثلث را در جمع دو بردار به جمع چند بردار نیز تعمیم داد.



شکل (۵-۱)

ب) روش متوازی الاضلاع در جمع وتفریق بردارها

از تقطه O دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$ را همسنگ بردارهای اولی ودومی رسم می کنیم .از انتهای بردار $\vec{a}$ خطی موازی دومی واز انتهای $\vec{b}$ نیز خطی موازی اولی رسم می کنیم، تا متوازی الاضلاعی مطابق شکل به وجود آید. قطری که از O رسم می شود ، برایند دو بردار $\vec{a}, \vec{b}$ است .



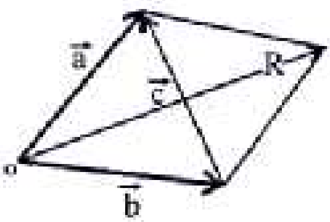
شکل (۶-۱)

مقدار بردار $\vec{a}$ را می توان از این رابطه به دست آورد.

$$R^2=a^2+b^2+2ab\ \cos\theta$$

هر چند روش متوازی الاضلاع روش ترسیمی است، ولی رابطه جبری بالا درموارد زیادی مورد استفاده قرار مـی گیـرد. در تفاضـل دو بردار نیر می توان دوباره $\vec{a}$ رابا بردار $\vec{b}$ - جمع نمود.

نکته مهم دراین جا این است که اگر متوازی الاضلاعی مطابق شکل 1-7 با دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ ساخته شود قطری که از نقطه O رسم مـی شود مجموع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ (R=) و قطر دیگر تفاضل دو بردار را نشان می دهد.



شکل (۷-۱)

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$$
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

بردار R مجموع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ وبردار $\vec{c}$ تفاضل آنها را می رساند.

ب- روش تحلیلی یا مولفه ای :

دراین روش ابتدا مولفه های هر بردار را به دست می اوریم جمع این مولفه ها برابر مولفه بردار براینده می باشد.

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$$
$$R_x=a_x+b_x$$
$$R_y=a_y+b_y$$
$$R_z=a_z+b_z$$
$$\vec{R}=R_x\hat{i}+R_y\hat{j}+R_z\hat{k}$$

مثال 1-4 :

براینده سه بردار C=-2i+2j-k و b=i-2k و a=2i-j+2k- را به دست آورید.

حل :

$$\vec{R}=(۲+۱-۲)\hat{i}+(-۱+۰-۲)\hat{j}-(۲-۲-۱)\hat{k}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$$

مثال 1-5 :

در مثال بالا عبارت r=2A-B-3C را به دست آورید .

$$\vec{R}=(۴\hat{i}-۲\hat{j}+۴\hat{k})-(\hat{i}-۲\hat{k})-۳(-۲\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k})$$
$$=(۴-۱+۶)\hat{i}+(-۲+۰-۶)\hat{j}+(۴+۲+۳)\hat{k}=۹\hat{i}-۸\hat{j}+۹\hat{k}$$

مثال 1-6 :

براینده دو بردار B=3i+2j , A=12i+4j را به دست آورید.

$$\vec{R}=(۱۲+۳)\hat{i}+(۴+۲)\hat{j}=۱۵\hat{i}+۶\hat{j}$$
$$R_x=R\cos\theta\Rightarrow ۱۵=۱۶/۲\cos\theta$$
$$\cos\theta=۰/۹۳\Rightarrow\theta=۲۱/۵^\circ$$
یا $\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{۶}{۱۵}=۰/۴\Rightarrow\theta=۲۱/۵^\circ$

مثال 1-7 :

اگر براینده دو بردار b=3i+yj,a=12i+4i با محور ox زوایه 45 درجه بسازد، y را به دست آورید.

حل :

$$\vec{R}=a+\vec{b}=(۱۲+۳)\hat{i}+(۴+y)\hat{j}$$
$$\vec{R}=۱۵\hat{i}+(۴+y)\hat{j}$$
$$\tan\theta=\frac{Ry}{Rx}$$
$$\tan ۴۵=\frac{۴+y}{۱۵}\Rightarrow y+۴=۱۵$$
$$y=۱۱$$
$$\vec{R}=۱۵\hat{i}+۱۵\hat{j}$$

مثال 1-8 :

اگر A-B=5i-j,A=4I باشد ، بردار B را به دست آورید.

حل :

$$\vec{A}-\vec{B}=(۴\hat{i}-۳\hat{j})-\vec{B}=۵\hat{i}-\hat{j}$$
$$\vec{B}=(۴\hat{i}-۳\hat{j})-(۵\hat{i}-\hat{j})=-\hat{i}-۲\hat{j}$$

مثال 9-1 :

اندازه سه بردار AوBوC بایکدیگر برابر است. درچه شرایطی مجموع آنها صفر می گردد؟

$$|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{C}|=a$$
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=۰\Rightarrow\vec{A}+\vec{B}=-\vec{C}$$

حل :

اگر θ زوایه بین دو بردار AوB باشد.

$$|A|^۲+|B|^۲+۲|A||B|\cos\theta=|C|^۲$$
$$a^۲+a^۲+۲a^۲\cos\theta=a^۲$$
$$\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

زوایه بین آنها 120 باشد.

مثال 10-1 :

دو بردار AوB در صفحه XY قرار دارند ومولفه های آن ها

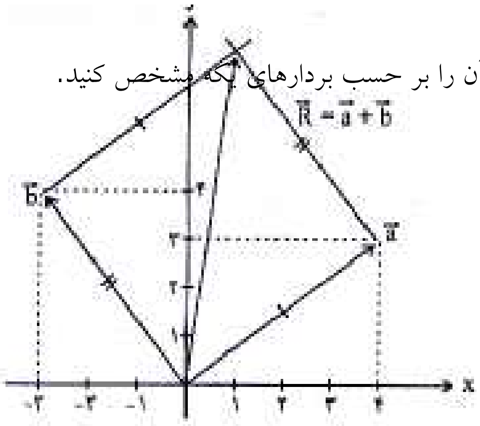
ax=4Cm,ay=3Cm,bX=-3Cm ،by=4cm

می باشند .

الف- این دو بردار را با رسم شکل نشان دهید.

ب- برایند انها را در دستگاه مختصات XOY رسم کنید وآن را بر حسب بردارهای یکه مشخص کنید.

ج- بزرگی برایند چقدر است ؟

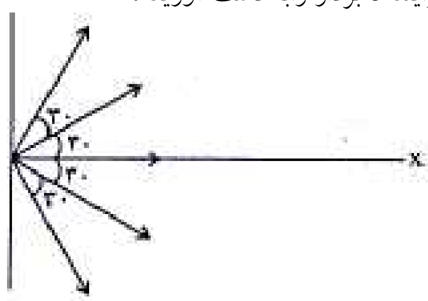


شکل (۸-۱)

$$R_x=۴+(-۳)=۱$$
$$R_y=۳+۴=۷$$
$$\vec{R}=\hat{i}+۷\hat{j}$$
$$R=\sqrt{(۱)^۲+(۷)^۲}==۷/۰۷cm$$

مثال 11-1 :

درشکل مقابل برایند 5 بردار رابه دست آورید .



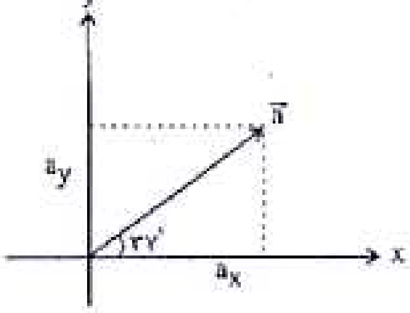
شکل

حل :

$$R_x=a+۲a\cos۳۰+۲a\cos۶۰=a+۲a\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۲a\frac{۱}{۲}=۳/۷۳a$$
$$R_y=۰$$
$$\vec{R}=۳/۷۳a\hat{i}$$

مثال 12-1:

بردار a به بزرگی 200 واحد را که با محور x ها زوایه 37 درجه می سازد به مولفه های x,y آن تجزیه می نماییم وبزرگی هر مولفه را به دست آورید.



شکل (۱۰-۱)

$$a_x=a\cos۳۷=(۲۰۰)(۰/۸)=۱۶۰$$
$$a_y=a\sin۳۷=(۲۰۰)(۰/۶)=۱۲۰$$

مثال 1-13 :

اندازه بردار های وزوایه های را که با محور x ها می سازند را به دست آورید.

$$\vec{a} = ۲\hat{i} + ۳\hat{j} \quad , \quad \vec{b} = \hat{i} - ۴\hat{j} \quad , \quad \vec{c} = \hat{i} + ۴\hat{j} \quad , \quad \vec{d} = ۶\hat{i} + ۷\hat{j}$$

$$a = \sqrt{(۲)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱۳} = ۳/۶۱$$

$$d = \sqrt{(۶)^۲ + (۷)^۲} = ۹/۲۲$$

$$\tan\theta = \frac{۷}{۶} = ۱/۱۷ \Rightarrow \theta = ۴۹/۵^\circ$$

$$c = \sqrt{(۱)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۱۷} \cong ۴/۱۲$$

$$\tan\theta = ۴ \Rightarrow \theta = ۷۶/۰^\circ$$

ضرب یک عدد در یک بردار

اگر عددی در یک بردار ضرب شود ، در تمام مولفه های آن ضرب می شود .

مثال 1-14 :

اگر a=4i+5j و m=2 باشد حاصل ma را به دست آورید:

حل :

$$\vec{F} = m\vec{a} = (۲)(۴\hat{i} + ۵\hat{j}) = ۸\hat{i} + ۱۰\hat{j}$$

ضرب بردارها :

بردارها را می‌توان به دو روش در یکدیگر ضرب نمود، الف) ضرب داخلی و ب) ضرب خارجی

الف) ضرب داخلی یا نرده‌ای که به آن ضرب «دات‌یو» یا نقطه‌ای نیز گفته می‌شود.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \qquad (۱-۱۱)$$

که a و b اندازه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد.

نکته، ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است، و برعکس اگر ضرب داخلی دو بردار صفر شود یا یکی از آن‌ها صفر است و یا بر هم عمود هستند.

نکته:

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = ۰ \qquad (۱-۱۲)$$

ضرب داخلی با روش مؤلفه‌ها:

دو بردار $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ و $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ را در نظر می‌گیریم، ضرب داخلی بین دو را به دست می‌آوریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (۱-۱۳)$$

که در آن از روابط مقابل استفاده شده است.

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = ۰ \qquad (۱-۱۴)$$

مثال ۱-۱۵

ضرب داخلی دو بردار $\vec{A} = ۲\hat{i} - ۳\hat{j} + ۲\hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + ۲\hat{k}$ را به دست آورید.

حل:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(۲)(۱)+(-۲)(-۱)+(۲)(۲)=۹$$

محاسبه زاویه بین دو بردار

از رابطه ضرب داخلی می‌توان استفاده نمود و زاویه بین دو بردار را به دست آورد.

(۱-۱۵)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=|A||B|\cos\theta$$

که θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

(۱-۱۶)

$$\cos\theta=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{|A||B|}$$

مثال ۱۶-۱

a را چنان تعیین کنید که زاویه بین دو بردار °۳۷ شود.

$$\vec{A}=a\hat{i}-۲\hat{j}+\hat{k} \text{ و } \vec{B}=\hat{i}-a\hat{j}+۲\hat{k}$$

حل،

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(a)(۱)+(-۲)(-a)+(۱)(۲)=۳a+۲$$

$$\cos\theta=\frac{۳a+۲}{\sqrt{(a)^۲+(-۲)^۲+(۱)^۲}\sqrt{(۱)^۲+(-a)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۳a+۲}{\sqrt{a^۲+۵}\sqrt{a^۲+۵}}=\frac{۳a+۲}{a^۲+۵}$$

زاویه بین دو بردار °۳۷ است، پس:

$$\cos۳۷=۰/۸=\frac{۳a+۲}{a^۲+۵}$$

$$۰/۸a^۲+۴=۳a+۲\Rightarrow ۰/۸a^۲-۳a+۲=۰$$

$$a=۲/۸۸ \text{ و } ۰/۸۷$$

مثال ۱۷-۱

زاویه بین دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}-۲\hat{j}+۲\hat{k}$ و $\vec{B}=۲\hat{i}-۳\hat{j}-۲\hat{k}$ را به دست آورید.

حل:

$$|A|=\sqrt{(۲)^۲+(-۲)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۱۷}=۴/۱۲$$

$$|B|=\sqrt{(۲)^۲+(-۳)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۱۷}\cong۴/۱۲$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(۲)(۲)+(-۲)(-۳)+(۲)(-۲)=۸$$

$$\cos\theta=\frac{۸}{۱۷}=۰/۴۷۱\Rightarrow\theta=۶۲/۰^\circ$$

مثال 1-18:

حاصل ضرب داخلی بردار های زیر را به دست آورید وزاویه بین آنها را محاسبه کنید؟

$\vec{a}=۲\hat{i}+۲\hat{j}$, $\vec{b}=\hat{i}-۴\hat{j}$

$\vec{a}=\hat{i}$, $\vec{b}=-۵\hat{j}$

$\vec{a}=۲\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=۲\hat{i}+\hat{j}$

$\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}$, $\vec{b}=۲\hat{i}+\hat{j}$

$\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{a}=\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

حل :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3)(1)+(2)(-4)=-5$$

$$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}\sqrt{(1)^2+(-4)^2}}=\frac{-5}{\sqrt{13}\sqrt{17}}=-0/336$$

$$\theta=109/6$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \theta=90^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2)(2)+(3)(1)+(-1)(0)=7$$

$$\cos\theta=\frac{7}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(-1)^2}\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{5}}=0/837$$

$$\theta=33/2^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1)(2)+(0)(1)+(-1)(0)=2$$

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=0/632$$

$$\theta=50/8$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1)(-1)+(1)(2)+(1)(1)=2$$

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=0/471$$

$$\theta=61/9^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(0)(1)+(0)(1)+(1)(1)=1$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}}=0/577$$

$$\theta=54/76^\circ$$

شرط موازی بودن وتعامد دو بردار :

هرگاه دو بردار aو b موازی باشند ، این رابطه برقرار است .

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

وهرگاه دو بردار a-b عمود باشند

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

مثال 19-1 :

m را طوری تعیین کنید که دو بردار :

$$\vec{a}=-2\hat{i}+2\hat{j}+(m+2)\hat{k} \quad , \quad \vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$$

الف بر هم عمود باشند:

ب- با هم موازی باشند.

حل :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)(-1)+(2)(1)+(m+2)(2)=8+2m$$

الف- شرط عمود بودن این است که:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow 8+2m=0 \Rightarrow m=-4$$

ب- شرط موازی بودن این است که :

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\frac{(-2)}{(-1)}=\frac{(2)}{(1)}=\frac{(m+2)}{2}\Rightarrow m+2=4$$

$$m=2$$

ضرب خارجی برداری دو بردار

حاصل ضرب خارجی دو بردار a,b برداری است مانند c به طوری که:

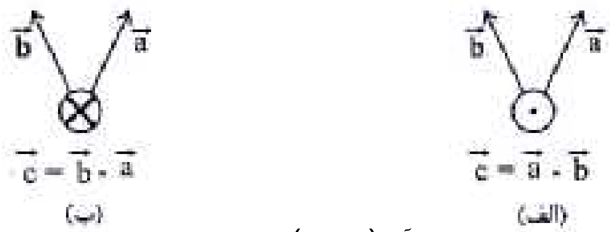
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

$$|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\sin\theta$$

مقدار بردار c ازاین رابطه به دست می اید:

که θ زوایه بین دو بردار می باشد.

جهت حاصل ضرب از قاعده دست راست به دست می آید . اگر انگشتان دست راست را در حالت کشیده در امتـداد بـردار اول قـرار دهیم به طوری که بتوان آنها را به طرف بردار دوم خم کرد، انگشت شست راست عمود بر صفحه دو بـردار جهـت حاصـل ضـرب را نشان می دهد.



شکل (1-11)

علامت جهت عمود بر صفحه به طرف بیرون آن (برونسو) وعلامت جهت عمود بر صفحه به طرف داخل (درونسو) می باشد.

نکته:

از رابطه 1-18 مشخص است که حاصل ضرب خارجی دو بردار هم راستا صفر است .

I×i=0 j×j=0 k×k=0

حاصل ضرب دو بردار به روش مولفه ای :

حاصل ضرب خارجی دو بردار b=bxi+byj+bzk و a=axi+ayj+ayk- با این روش به دست می آید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

مثال 1-20 :

حاصل ضرب برداری دو بردار b=i+2j-k و a=3i-2j+k را به دست آورید.

حل :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\hat{i}(2-2)-\hat{j}(-3-1)+\hat{k}(6+2)=4\hat{j}+8\hat{k}$$

مثال 1-21 :

برای دو بردار aوb داریم :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$

حل :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=d\Rightarrow ab\cos\theta=d$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow ab\sin\theta=c$$

دو رابطه را بر یکدیگر تقسیم می کنیم :

$$\frac{ab\sin\theta}{ab\cos\theta}=\frac{c}{d}=\sqrt{3}\Rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$\theta=60^\circ$$

مثال 1-23:

اگر b=-3i+4j و a=4i+3i باشد :

الف - a×b

ب - a.b رابه دست آورید.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 4 & 3 & 0\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=\hat{k}(16+9)=25\hat{k}$$

حل :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(-3)(4)+(4)(3)=0$$

دو بردار عمود بر هم هستند.

مثال 1-24 :

دو بردار $b=i-j$ و $a=2i+3j$ را در نظربگیرد .حاصل عبارت های الف) $c=a+b$ ،ب) $d=a-b$ ،ج]) زوایـه بـین بردارهـای (b‌و a) و (d‌و c) ،د) زوایه بین بردار d و محور x ها ، ه) $a.b$ ، و) $a\times b$ را بدست آورید.

$$\vec{c}=(۲+۱)\hat{i}+(۳-۱)\hat{j}=۳\hat{i}+۲\hat{j}$$

$$\vec{d}=(۲-۱)\hat{i}+(۳+۱)\hat{j}=\hat{i}+۴\hat{j}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(۲)(۱)+(۳)(-۱)=-۱$$

$$\cos\theta=\frac{-۱}{\sqrt{(۴+۹)}\sqrt{۲}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲۶}}=-۰/۱۹۶$$

$$\tan\theta=\frac{۴}{۱}=۴$$

$$\theta=۷۶^{\circ}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۲ & ۳ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۰\end{vmatrix}=\hat{k}(-۲-۳)=-۵\hat{k}$$