Subject

Year: Month: Date:

جزوه: آمار و احتمال

استاد: یکشلو

تعریف شاخص: نماینده یک گروه ممکن است که میزان و جهت تغییرات را نشان می‌دهد.

شاخص‌ها وسیله‌ای برای سنجش تغییرات متغیرهای اقتصادی است.

با گذشت زمان متغیرهای اقتصادی مانند قیمت، تولید، میزان فروش و قدرت خرید پول تغییر می‌کند.

یک شاخص می‌تواند تغییرات هریک از این متغیرها را در طول زمان به سرعت و به آسانی نشان دهد.

شاخص در ساده‌ترین شکل خود عبارت است از نسبت دو عدد که به صورت درصد بیان شده است.

$$\text{شاخص} = \frac{\text{سال مورد نظر}}{\text{سال پایه}} \times 100$$

شاخص قیمت → لاسپیرز (L)، پاشه (P)، فیشر (F)

لاسپیرز (L)

سال پایه: $q_1^0 \to p_1^0$، $q_2^0 \to p_2^0$

هزینه خانوار در سال پایه: $p_1^0 q_1^0 + p_2^0 q_2^0 = A_0$

نکته: در لاسپیرز q^t سال مورد نظر q^0 نوشته می‌شود.

سال مورد نظر: $q_1^t \to p_1^t$، $q_2^t \to p_2^t$

هزینه خانوار در سال مورد نظر: $p_1^t q_1^{t0} + p_2^t q_2^{t0} = A_t$

t برای سال مورد نظر و 0 (صفر) برای سال پایه استفاده می‌شود.

FARHANG

Subject

Year: Month: Date:

سال مورد نظر $\rightarrow$ $L_t = \frac{A_t}{A_0} \times 100 = \frac{P_1^t q_1^0 + P_2^t q_2^0}{P_1^0 q_1^0 + P_2^0 q_2^0} \times 100$ (شاخص سازمان ملل ← سال یعنی سبد ثابت)

سال پایه $\rightarrow$ $L_t = \frac{A_t}{A_0} = \frac{P_1^t q_1^0 + P_2^t q_2^0 + \cdots P_n^t q_n^0}{P_1^0 q_1^0 + P_2^0 q_2^0 + \cdots P_n^0 q_n^0} \times 100 \rightarrow L_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^t q_i^0}{\sum_{i=1}^{n} P^0 q^0} \times 100$

در شاخص لاسپیرز مقادیر به عنوان مقادیر سال پایه در نظر گرفته می‌شود و شاخص لاسپیرز می‌خواهد مقدار تورم را محاسبه کند.

نکته: در شاخص ها مبنا عدد ۱۰۰ است.

پاشه (P) برعکس لاسپیرز است.

در شاخص پاشه مقادیر براساس سال مورد نظر تعیین می‌شود.

در شاخص پاشه مبنا مورد نظر محاسبه هزینه زندگی خانوار است.

سال پایه $\begin{cases} q_1^0 \rightarrow P_1^0 \\ q_2^0 \rightarrow P_2^0 \end{cases} \rightarrow P_1^0 q_1^t + P_2^0 q_2^t = A_0$ هزینه خانوار در سال پایه

سال مورد نظر $\begin{cases} q_1^t \rightarrow P_1^t \\ q_2^t \rightarrow P_2^t \end{cases} \rightarrow P_1^t q_1^t + P_2^t q_2^t = A_t$ هزینه خانوار در سال مورد نظر

$P_t = \frac{A_t}{A_0} \times 100 = \frac{P_1^t q_1^t + P_2^t q_2^t + \cdots P_n^t q_n^t}{P_1^0 q_1^t + P_2^0 q_2^t + \cdots P_n^0 q_n^t} \times 100 \rightarrow P_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 q_i^t} \times 100$

Subject

Year: Month: Date:

شاخص فیشر (F) فرمول ⇐ $F_t = \sqrt{L_t P_t}$

شاخص فیشر میانگین هندسی ۲ شاخص لاسپیرز و پاشه است.

این شاخص می‌خواهد مانند پاشه هزینه زندگی خانوار را نشان دهد.

مثال فرض کنید که مردم تنها ۳ کالای برنج، روغن و گوشت را به عنوان مواد غذایی مصرف می‌کنند در جدول زیر سال ۱۳۶۸ به عنوان سال پایه در نظر گرفته شده است.

الف) شاخص لاسپیرز، پاشه و فیشر را حساب کنید!

ب) عدد به دست آمده را تحلیل اقتصادی کنید!

کالا	p_0 قیمت	q_0 مقدار	p_t قیمت	q_t مقدار
	۱۳۶۸		۱۳۷۰	
برنج	۱۱۵	۳۸	۱۰۵	۴۱
روغن	۱۲۰	۱۰	۱۶۰	۱۰
گوشت	۱۸۰	۱۶	۲۵۰	۲۰

$$\text{شاخص} = \frac{\text{سال مورد نظر}}{\text{سال پایه}} \times 100$$

$$L_t = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{p_1 q_0 + p_2 q_0 + p_3 q_0}{p_1 q_0 + p_2 q_0 + p_3 q_0} \times 100$$

$$= \frac{(105 \times 38) + (160 \times 10) + (16 \times 250)}{(115 \times 38) + (120 \times 10) + (180 \times 16)} \times 100 = \frac{9950}{8450} \times 100 = 117.75\%$$

(4380) (1600) (4000) / (4370) (1200) (2880)

FARHANG

Subject

Year: Month: Date:

$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i^t q_i^t}{\sum_{i=1}^{3} p_i^0 q_i^t} \times 100 = \frac{(105\times 41)+(125\times 10)+(280\times 20)}{(110\times 41)+(120\times 10)+(180\times 20)} \times 100 = \frac{10905}{9510} \times 100 = 114.6\%$$

$$f = \sqrt{L_t P_t} = \sqrt{(113.44)(114.6)} = 114.03$$

ج (ب) نکته ① عدد به دست آمده از شاخص لاسپیرز (۱۱۴٫۶) می باشد یعنی تورم به میزان ۱۴٫۶٪ داشته ایم.

نکته ② مقدار شاخص پاشه (۱۱۳٫۴۴) می باشد که این میزان هزینه زندگی خانوار را نشان می دهد و به ما می گوید ۱۳٫۴۴٪ افزایش هزینه زندگی خانوار داشته ایم

نکته ③ شاخص فیشر هم می خواهد هزینه زندگی خانوار را نشان دهد و در واقع به ما می گوید به میزان ۱۴٫۰۳٪ افزایش هزینه خانوار داشته ایم در واقع شاخص فیشر می خواهد کم بودن شاخص لاسپیرز و بیش برآوردی شاخص پاشه را جبران کند.

نکته ④ در اغلب کشورهای دنیا شاخص لاسپیرز به عنوان برترین شاخص برای محاسبه تورم می باشد

FARHANG NOVIN

Subject

Year: Month: Date:

مثال: در یک مطالعه با نمونه تصادفی از خانوارهای کسبه‌ای تأمین سوخت

خوراکی مصارف از برق، نفت و گاز استفاده می‌کردند تماس حاصل شده است

و متوسط مقدار مصرف ماهیانه آنان به صورت زیر آمده است

کالا	قیمت p_0	مقدار q_0	قیمت p_1	مقدار q_1
برق	۶/۵	۶۰	۷	۷۲
نفت	۱۳	۲۲۵	۱۵	۲۳۰
گاز	۱۱۰	۷	۱۱۷	۷/۵

الف) مطلوب است محاسبه شاخص (P) (F) (L)

ب) تحلیل اقتصادی اعداد به دست آمده

کالا	قیمت p_0	مقدار q_0	قیمت p_1	مقدار q_1
برق	۶/۵	۶۰	۷	۷۲
نفت	۱۳	۲۲۵	۱۵	۲۳۰
گاز	۱۱۰	۷	۱۱۷	۷/۵

سال پایه — سال مورد نظر

$$L_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{p_1q_0 + p_2q_0 + p_3q_0}{p_1q_0 + p_2q_0 + p_3q_0} \times 100$$

$$\rightarrow \frac{(7 \times 60) + (15 \times 225) + (117 \times 7)}{(6/5 \times 60) + (13 \times 225) + (110 \times 7)} \times 100 = \frac{4414}{3905} \times 100 = 112/9\%$$

FARHANG NOVIN

Subject

Year: Month: Date:

$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^{3} p^t q^t}{\sum_{i=1}^{3} p^0 q^t} \times 100 = \frac{p_1^t q_1^t + p_2^t q_2^t + p_3^t q_3^t}{p_1^0 q_1^t + p_2^0 q_2^t + p_3^0 q_3^t} \times 100$$

$$= \frac{(0.4 \times 72) + (15 \times 230) + (117 \times 7.5)}{(0.5 \times 72) + (13 \times 230) + (110 \times 7.5)} \times 100 = \frac{12729}{4283} \times 100$$

$$\Rightarrow 297.1\%$$

$$I_t = \sqrt{I_t \, P_t} = \sqrt{(112.9)(297.1)} = 183.146$$

پارامتر و آماره

پارامتر یک ویژگی جامعه است، در حالی که آماره یک ویژگی نمونه است

$\bar{x}$ (میانگین نمونه) $= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (مجموع اعداد نمونه، n: تعداد نمونه)

فرمول میانگین نمونه عبارت است از

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = n$

وقتی θ نمونه را جمع می‌کنیم تقسیم بر تعداد می‌کنیم و میانگین بدست می‌آید

$\bar{x}$ نمونه $= \mu$ این بار نام دارد و جامعه یعنی میانگین است

میانگین نمونه $\bar{x}$ و میانگین جامعه μ_x

فرمول میانگین جامعه

$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ (مجموع اعداد، N: تعداد جامعه)

σ_x انحراف معیار جامعه

$\sigma_{\bar{x}}$ انحراف معیار نمونه

n تعداد نمونه

N تعداد جامعه

FARHANG NOVIN

Subject

Year: Month: Date:

واریانس ← درجه پراکندگی ها از میانگین را نشان می دهد و می خواهد چقدر باشد

از آن مقدار مورد نظر چقدر خطا داشتیم

$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$ واریانس جامعه

$\sqrt{\sigma_x^2}$ انحراف معیار جامعه

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ واریانس نمونه

$\sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2}$ انحراف معیار نمونه

معرف نرمال بودن توزیع $\bar{x}$ ،

اصطلاح توزیع جامعه با مفهوم توزیع احتمال یک متغیر تصادفی است

فرض کنید برای مثال نمرات کنکور سراسری دارای توزیع نرمال باشد

آنگاه می توان گفت که چون نمرات با صورت نرمال توزیع شده است پس توزیع جامعه نیز نرمال است .

نکته ① اگر جامعه دارای توزیع نرمال باشد آنگاه نمونه های آن نیز با هر حجمی دارای توزیع نرمال است

نکته ② اگر جامعه ای دارای توزیع نرمال نباشد چنانچه حجم نمونه بزرگتر از ۳۰ باشد عملا توزیع ما نرمال خواهد بود

کاربرد (در کتب مختلف χ های مرکب برای نمونه n بزرگ برای جامعه استفاده می‌شود)

Subject

Year: Month: Date:

قضیه حد مرکزی: این قضیه ثابت می‌کند اگر نمونه‌های تصادفی ساده از جامعه نامحدودی که دارای میانگین و انحراف معیار مشخص است انتخاب بشود بزرگ شدن حجم نمونه توزیع $\bar{x}$ یا $\hat{p}$ به سمت توزیع نرمال میل می‌کند.

برآورد (تخمین)

برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای:

برآوردها به ۲ نوع عمده برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای تقسیم می‌شوند.

برآورد نقطه‌ای: در برآورد نقطه‌ای کمیت شاخص مورد نظر در جامعه از نمونه محاسبه می‌شود به این ترتیب برآورد یا تخمین از شاخص مربوط به جامعه آماری به دست می‌آید. فرض کنید نمونه تصادفی ساده زیر با حجم $n=6$ از جامعه‌ای که پارامترهای آن نامشخص است انتخاب شده باشد ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۱۱ را $n=6$

اکنون چنانچه بخواهیم میانگین جامعه را تخمین بزنیم واضح‌ترین راه این است که میانگین نمونه را حساب کنیم و آن را به عنوان تخمین از میانگین جامعه ارائه کنیم

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{n} = \frac{1+2+4+5+7+11}{6} \Rightarrow (1)$$ میانگین جامعه

برآورد نقطه‌ای است

FARHANG NOVIN

این جواب صحیح است برآورد نقطه‌ای است

۸

Subject

Year: Month: Date:

فرمول $\bar{X}$ را اصطلاحاً برآورد کننده یا (تخمین زننده) میانگین جامعه می نامند.

در اینجا عدد $\bar{X}$ عدد ۵ محاسبه شده که اصطلاحاً آنرا برآورد نقطه ای برآورد جامعه می نامند. از آنجا که $\bar{X}$ عدد مشخص را به عنوان برآوردی از میانگین جامعه ارائه می کند اصطلاحاً برآورد کننده نقطه ای می نامند. در مقابل برآورد فاصله ای تخمین می زند

پارامتر جامعه در میان ۲ حد مشخص قرار می گیرد.

خصوصیات برآورد کننده های نقطه ای:

تعدادی خصیصه که معمولاً یک برآورد کننده نقطه ای خوب باید دارا باشد این خصیصه ها

عبارتند از: تقریب نقطه گیری برآورد کننده زیرا تقریب نقطه گیری مشخص می کند که

تا چه اندازه تخمین به دست آمده می تواند به پارامتر جامعه نزدیک باشد.

خصوصیات اول: بدون تورش بودن (نا اریب): برآورد کننده ای را

بدون تورش (نا اریب) گوییم که میانگین توزیع نقطه گیری آن با پارامتری که

از جامعه مورد برآورد است برابر باشد.

یا عبارت دیگر اگر پارامتر جامعه را با حرف θ (تتا) و برآورد کننده آن را

Subject:

Year: Month: Date:

با حرف $(\hat{\theta})$ (تاءِ) نشان دهیم در آن حالت در صورتی $\hat{\theta}$ بدون

اصل ریاضی (جایگزین)

تورش است که $E(\hat{\theta}) = \theta$

خصوصیات دوم: کارایی:

اگر ۲ برآورد کننده‌ای که برای تخمین پارامتری از جامعه‌ای ارائه شده‌اند هر دو

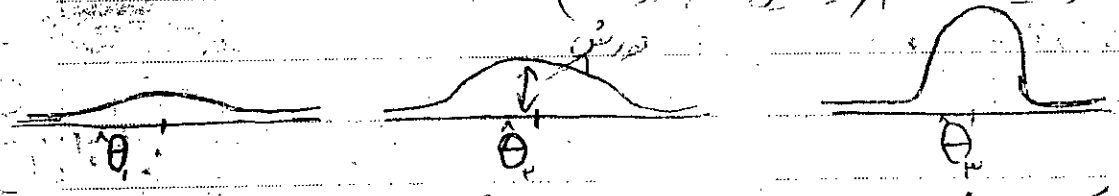
بدون تورش باشند آنگاه باید ببینیم کدام برآورد کننده دارای توزیع

متمرکزتری در حول پارامتر جامعه‌ای است. پس حتماً برآورد کننده بدون

تورش باید مطلقاً آن برآورد کننده‌ای بهتر است که دارای پراکندگی کمتر باشد

عبارت دیگر دارای کارایی بیشتر است

خصوصیت سوم (جایگزین مجدد در خطا)



برآورد کننده $\hat{\theta}_1$ بدون تورش است ولی دارای پراکندگی زیادی است

(واریانس زیاد) از طرف دیگر برآورد کننده $\hat{\theta}_2$ با نظر می رسد روی هم رفته

بهتر از $\hat{\theta}_3$ باشد زیرا بهترین ترکیب را از لحاظ کوچکی واریانس

ولی تورش دارا است.

FARHANGNOVIN

Subject

Year: Month: Date:

شاخصی که بتواند در عین حال تورش و واریانس را با توجه مناسبی در نظر قرار دهد

میانگین مجذور خطا

mean squared Error MSE = $E(\hat{\theta} - \theta)^2$ میانگین مجذور خطا است

خصوصیات خوب برآوردگر، سازگاری

خصوصیت دیگری که یک برآوردکننده خوب باید داشته باشد سازگاری است

برآوردکننده‌ای سازگار است که وقتی حجم نمونه (n) خیلی بزرگ شود

احتمال اینکه تخمین به دست آمده با پارامتر جامعه نزدیک شود بیشتر زیاد می‌شود

برآورد یا تخمین فاصله‌ای

یک برآورد فاصله‌ای دامنه‌ای از اعداد را ارائه می‌کند که ممکن است پارامتر

جامعه در آن جامعه قرار داشته باشد برای مثال فاصله‌ای نقاط دو از جامعه‌ای که

میانگین آن μ است انتخاب کرده‌ایم میانگین نمونه $\bar{x} = 0$ برآورد

نقطه‌ای میانگین جامعه (μ) است $\bar{x} = 0$ ۱۱ و ۷ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱

از طرف دیگر چنانچه عنوان کنیم که μ بین $\bar{x} - 1 \leq \mu \leq \bar{x} + 1$ قرار دارد

آنگاه μ بین ۴ و ۶ $2 < \mu < 6$ یک برآورد فاصله‌ای برای میانگین جامعه

FARHAN

Year: Month: Date:

تاصیده می‌کردیم برآورد فاصله‌ای را به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم

مفهوم فاصل اطمینان: برآورد فاصله‌ای θ عبارت است از تکمیل

فاصله‌ای که از A تا B انتظار می‌رود میانگین مجهول جامعه در آن

فاصله قرار بگیرد. این فاصله بستگی به

(۱) میانگین نمونه تصادفی منتخب از آن جامعه ($\bar{x}$)

(۲) مشخص بودن توزیع نمونه‌گیری $\bar{x}$

نمی‌توانیم ۱۰۰٪ مطمئن باشیم که یک چنین فاصله‌ای در برگیرنده مجهول

جامعه (θ) است زیرا

این فاصله براساس اطلاعات حاصل از یک نمونه تصادفی ساخته شده است

که معمولاً بخش کوچکی از یک جامعه است، برآورد فاصله اطمینان برای

(θ) آن چنان برآوردی است که ما تنها درجه اعتماد یا احتمالی

گرفتن θ در آن فاصله در اختیار داریم. ۹۰ یا ۹۵٪ اطمینان برای بدست

آوردن این فاصله اطمینان آن چنان مورد نیاز داشته باشیم که