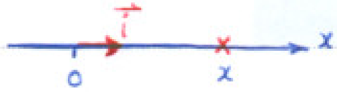
فصل ۱: حرکت شناسی

حرکت در مسیر مستقیم:



بردار مکان: برداری است که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن بر جسم ختم شود.

بردار مکان $\vec{x} = x\vec{i}$ $\quad (x = f(t))$

مکان

سرعت متوسط ($\bar{v}$): تغییر مکان در واحد زمان: $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ← جابجایی در واحد زمان

معادله مکان - زمان: $x = vt + x_0$ $\xleftarrow{\text{در حرکت یکنواخت}}$ $\boxed{x = \bar{v}t + x_0} \Leftarrow x - x_0 = \bar{v}t \Leftarrow \bar{v} = \dfrac{x - x_0}{t - \cancel{t_0}}$

بردار سرعت متوسط ($\vec{\bar{v}}$): $\vec{\bar{v}} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\Delta t} = \dfrac{x\vec{i} - x_0\vec{i}}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{\Delta t}\vec{i}$

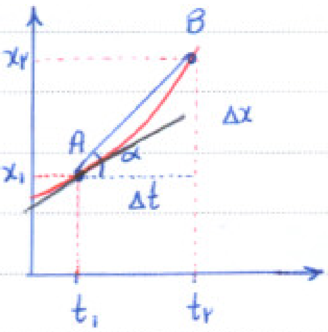
سرعت لحظه‌ای (v): $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$

بردار سرعت لحظه‌ای ($\vec{v}$): $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d(x\vec{i})}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \cancel{\dfrac{d\vec{i}}{dt}x} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v\vec{i}}$

تعبیر هندسی سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

نمودار مکان - زمان متحرک مطابق شکل صفحه بعد است:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

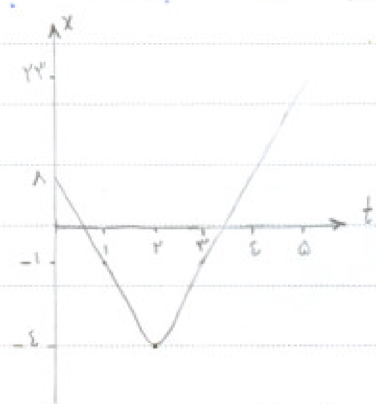


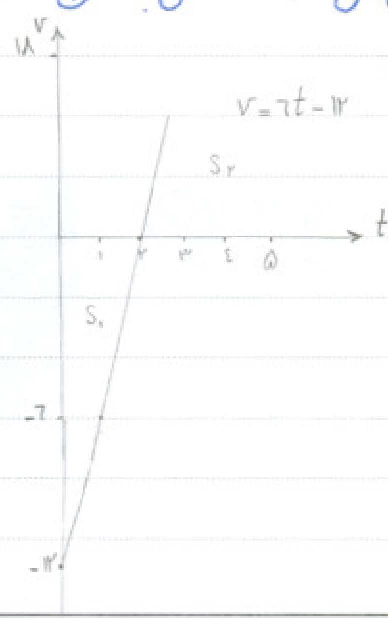
در نمودار مکان - زمان سرعت متوسط بین دو نقطه از نمودار برابر است با شیب پاره خطی که آن دو نقطه را به هم وصل می کند.

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$$

اگر Δt به سمت صفر میل کند (نقطه‌ی B فوق العاده به A نزدیک شود) خط AB در نقطه‌ی A از منحنی مماس خواهد شد، بنابراین می توان گفت در نمودار مکان - زمان سرعت لحظه‌ای متحرک برابر است با شیب خط مماس بر نمودار در همان لحظه.

مثال ۱: معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = 3t^2 - 12t + 8$ است. مطلوبست: ۱) رسم نمودارهای سرعت - زمان و مکان - زمان متحرک در ۵ ثانیه اول حرکت ۲) سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت ۳) بردار سرعت متوسط در ۲ ثانیه‌ی اول ۴) سرعت متحرک در لحظه‌های $t=2s$ ، $t=4s$ و همچنین سرعت اولیه متحرک ۵) جابجایی متحرک در ۵ ثانیه اول حرکت و همچنین مسافت پیموده شده در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت ۶) معادله‌ی بردار مکان متحرک را نوشته و سپس بردار مکان متحرک را برای لحظه $t=2s$ بدست آورید.





$\bar{V} = \frac{8-8}{4} = 0$ $\Delta S = 12 + 27 = 39m$

$\vec{\bar{V}} = \frac{-4-8}{2} = -6\vec{i}$ $\vec{x} = (3t^2 - 12t + 8)\vec{i}$

$V_2 = 0$ ، $V_4 = 12\, m/s$ ، $V_{\text{اولیه}} = -12\, m/s$ $\vec{x} = -4\vec{i}$

$\Delta x = x_5 - x_0 = 23 - 8 = 15m$

$S_1 = -12m$ ، $S_2 = 27m \Longrightarrow S_1 + S_2 = 15m$ ، $|S_1| + |S_2| = 39m$

- سطح زیر نمودار سرعت - زمان در یک فاصلهٔ زمانی معین برابر است با جابجایی یا تغییر مکان متحرک.

- مجموع قدر مطلق های سطح زیر نمودار سرعت - زمان در یک فاصلهٔ زمانی معین برابر است با مسافت پیموده شده.

جابجایی $\leq$ مسافت پیموده شده

شتاب متوسط ($\bar{a}$): تغییر سرعت در واحد زمان.

$$\underset{(m/s^2)}{\bar{a}} = \frac{\overset{\to\, m/s}{\Delta v}}{\underset{\to\, s}{\Delta t}}$$

بردار شتاب متوسط ($\vec{\bar{a}}$)

$$\vec{\bar{a}} = \bar{a}\,.\,\vec{i}$$

شتاب لحظه ای (a):

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

بردار شتاب لحظه ای ($\vec{a}$):

$$\vec{a} = a\,.\,\vec{i}$$

مثال ۲: معادلهٔ مکان-زمان متحرکی در SI بصورت $x = 3t^5 - 4t + \sin \pi t$ است مطلوبست الف) شتاب متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت ب) شتاب متحرک در لحظهٔ $t = 2s$ ج) بردار شتاب اولیه متحرک

$v = 15t^4 - 4 + \pi \cos \pi t$ $\qquad \bar{a} = \frac{v_2 - v_0}{2} = \frac{236 + \pi - \pi + 4}{2} = 120 \ m/s^2$

$a = 60t^3 - \pi^2 \sin \pi t$ $\qquad a = 480 \ m/s^2$

$a = 0$ $\qquad \vec{a} = 0$

حرکت با شتاب ثابت در مسیر مستقیم

a ثابت: $\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow v = \underset{a}{\boxed{\ }}\, t + \underset{v_0}{\boxed{\ }} \Rightarrow v = at + v_0$ معادلهٔ سرعت-زمان

$: v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow x = \underset{\frac{1}{2}a}{\boxed{\ }}\, t^2 + \underset{v_0}{\boxed{\ }}\, t + \underset{x_0}{\boxed{\ }} \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$: v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$

$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0$

$: x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

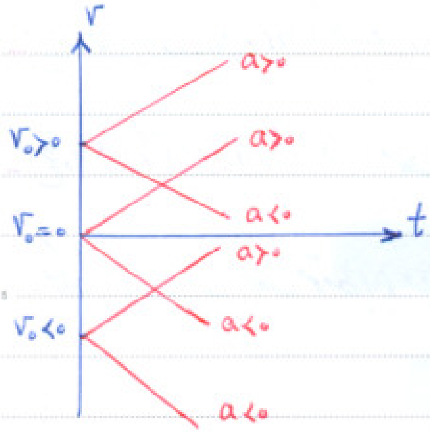
$\Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

نمودارهای حرکت با شتاب ثابت:

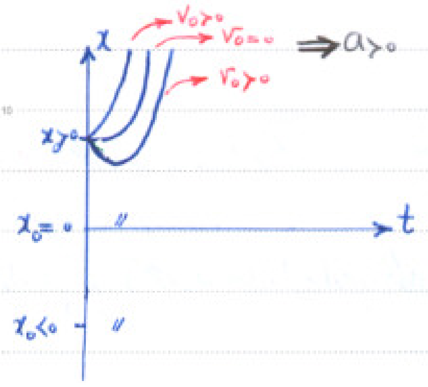
الف) نمودار سرعت-زمان $(v = at + v_0)$

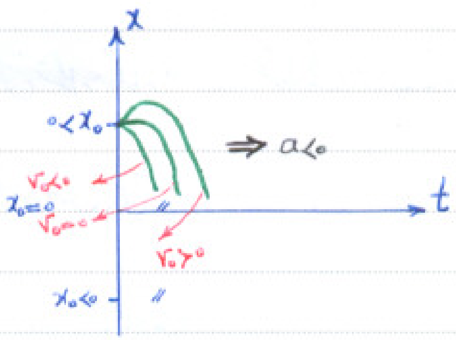
Subject: ۵

Year. Month. Date. ( )

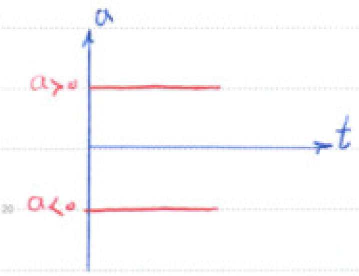


ب: نمودار مکان - زمان $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$

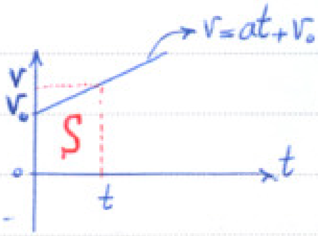




ج: نمودار شتاب - زمان



سطح زیر نمودار سرعت - زمان



$$S=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)t=\frac{(at+v_0+v_0)}{2}t$$

$$S=\underbrace{\frac{1}{2}at^2+v_0t}_{x-x_0} \Rightarrow S=\Delta x$$

- سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر با تغییر مکان است.

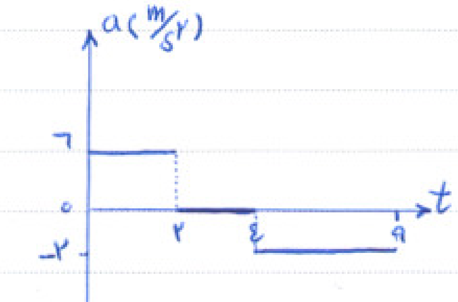
- سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر با تغییر سرعت است.

در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط برابر میانگین سرعت‌ها.

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-\cancel{t_0}}\Rightarrow \bar{V}=\left(\frac{V+V_0}{2}\right)\times\frac{t}{t}\Rightarrow * \ \bar{V}=\frac{V+V_0}{2}$$

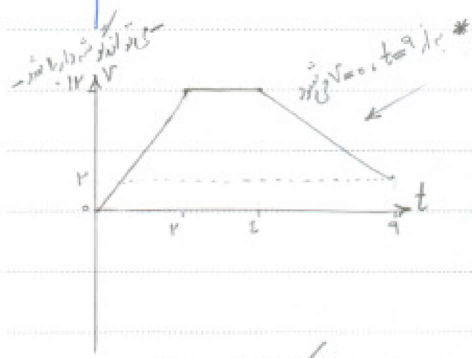
$$\Rightarrow\frac{(at+V_0)+V_0}{2}\Rightarrow * \ \bar{V}=\frac{1}{2}at+V_0$$

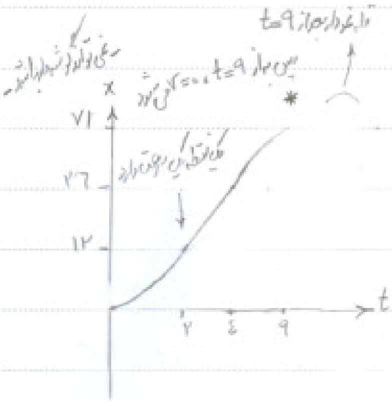
مثال: نمودار شتاب ـ زمان متحرکی در مسیر مستقیم مطابق شکل مقابل است. نمودارهای سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان آن متحرک را رسم کنید. (متحرک در مبدا زمان از مبدا مکان حرکت کرده است.) $(V_0=0)$



$V_1=at+V_0\Rightarrow V_1=6t$

$V_2=at+V_0\Rightarrow V_2=-2t+12$





$x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow x_1=3t^2$

$x_2=Vt+x_0\Rightarrow x_2=12t+12$

$x_3=\frac{1}{2}at^2+V_0t+x_0\Rightarrow x_3=-t^2+12t+20$

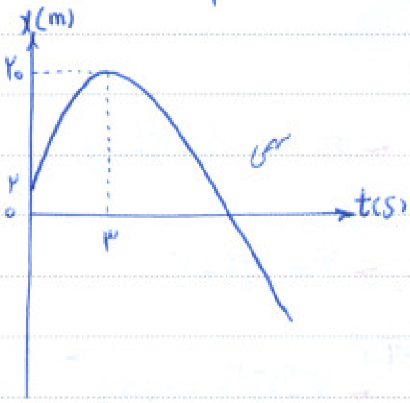
شتاب می‌تواند در یک لحظه تغییر کند ولی سرعت نمی‌تواند در یک لحظه تغییر کند زیرا: $a=\frac{\Delta V}{\Delta t}$, $\Delta t=0$ ⇐ $F=ma\uparrow$ ← زیاد می‌شود که انرژی محدود است. x

Subject: ۷/۱۱
Year. Month. Date. ( )

تندشونده $\begin{cases} x<0 \\ v>0 \\ a>0 \end{cases}$ یکنواخت $\begin{cases} x>0 \\ v>0 \\ a=0 \end{cases}$ کندشونده $\begin{cases} x>0 \\ v>0 \\ a<0 \end{cases}$

کندشونده $\begin{cases} x<0 \\ v<0 \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0 \\ v<0 \\ a=0 \end{cases}$ تندشونده $\begin{cases} x>0 \\ v<0 \\ a<0 \end{cases}$

مثال: نمودار مکان-زمان متحرکی مطابق شکل است. نمودارهای سرعت-زمان و شتاب-زمان را رسم کنید.



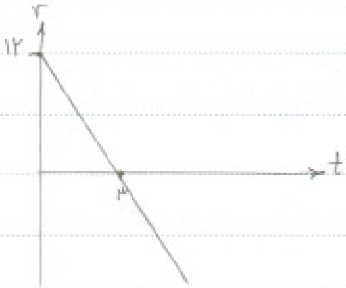
② $V = at + V_0 \longrightarrow 0 = 3a + V_0 \Rightarrow a = -\frac{V_0}{3}$

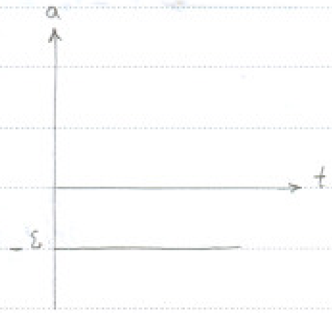
$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$

$20 = \frac{1}{2}a\times 9 + 3V_0 + 2 \longrightarrow 18 = \frac{9}{2}\left(-\frac{V_0}{3}\right) + 3V_0 \longrightarrow V_0 = 12\,\frac{m}{s}$

$\longrightarrow a = -4\,\frac{m}{s^2}$

$V = at + V_0 \Rightarrow V_3 = -4\times 3 + 12$

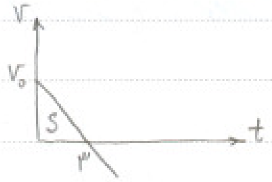




① در ۳ ثانیه‌ی اول: $\bar{V} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{18}{3} = 6\,\frac{m}{s}$

$\bar{V} = \frac{V + V_0}{2} \Rightarrow 6 = \frac{0 + V_0}{2} \Rightarrow V_0 = 12\,\frac{m}{s}$ $\begin{cases} V = at + V_0 \\ t = 3 \longrightarrow V = 0 \end{cases}$ $0 = 3a + 12 \Rightarrow a = -4\,\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow V = -4t + 12$

③


مساحت زیر نمودار $V-t$ $= \Delta x$

$\Delta x = 18$ $\frac{3\times V_0}{2} = 18 \longrightarrow V_0 = 6\,\frac{m}{s}$

PAPCO

سقوط آزاد

سقوط آزاد حرکت جسمی است در راستای قائم که نیروی مقاومت هوا ناچیز است و تنها نیروی مؤثر وزن جسم است.

$$\left.\begin{array}{l} F=mg \\ F=ma \end{array}\right\} \Rightarrow ma=mg \Rightarrow a=g=9.8\simeq 10\ \mathrm{m/s^2}$$

$$x=\tfrac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \longrightarrow y=\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \longrightarrow y=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

$$v=at+v_0 \longrightarrow v=gt+v_0 \longrightarrow v=-gt+v_0$$

$$v^2-v_0^2=2a\,\Delta x\ (x-x_0) \longrightarrow v^2-v_0^2=2g\,\Delta y\ (y-y_0) \longrightarrow v^2-v_0^2=-2g\,\Delta y\ (y-y_0)$$

- اگر جهت مثبت رو به بالا باشد، شتاب گرانش منفی خواهد شد.
- اگر جهت مثبت رو به بالا و گلوله رو به پایین پرتاب شود، v_0 نیز منفی می‌شود.
- اگر نقطه‌ی پرتاب مبدأ فرض شود $y_0=0$ می‌شود.

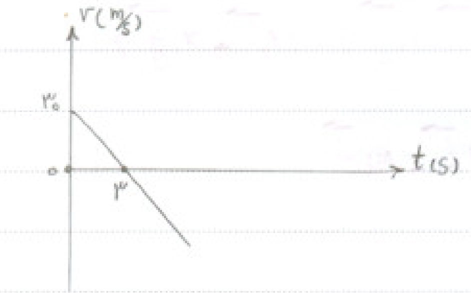
مثال: از ارتفاع ۲۵m سطح زمین گلوله‌ای را با سرعت اولیه‌ی ۲۰m/s در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. مطلوبست: الف) زمان رسیدن گلوله تا ارتفاع اوج ب) کل زمان حرکت گلوله تا رسیدن به زمین ج) گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند د) رسم نمودارهای سرعت-زمان و مکان-زمان. (مقاومت هوا ناچیز، جهت مثبت رو به بالا و $g=10\ \mathrm{m/s^2}$ و مبدأ مکان نقطه‌ی پرتاب است.)

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \longrightarrow -900 = -20\Delta y \Rightarrow \Delta y = 45m$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \longrightarrow 45 = -5t^2 + 30t \longrightarrow t = 3s$$

$$\longrightarrow -35 = -5t^2 + 30t \longrightarrow \begin{cases} t = -1s & \text{غ ق ق} \\ t = 7s \end{cases} \longrightarrow 7 + 6 = 13s$$

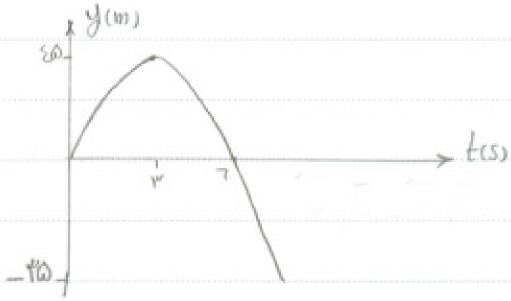
$$v = -10t + 30 \qquad t = 7s \longrightarrow v = -40\, m/s$$



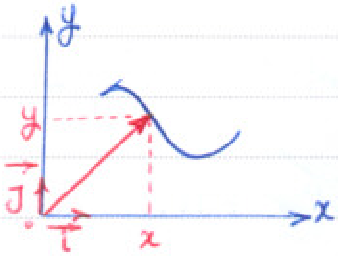
$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -10t + 30$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow y = -5t^2 + 30t$$

$t = 3 \longrightarrow y = 45$ متر



حرکت در دو بعد (حرکت در صفحه)



بردار مکان $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \longrightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$:معادله‌های مکان

اگر در معادله‌های مکان t را حذف کنیم، y تابعی از x در می‌آید و به این رابطه معادله‌ی مسیر می‌گوییم.
t را از یکی از معادله‌ها یافته در دیگری قرار می‌دهیم.

$$y = h(x)$$

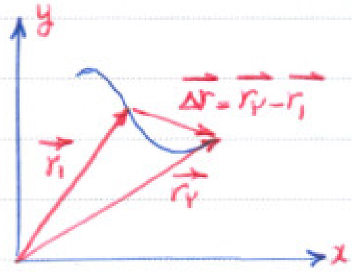
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

طول بردار مکان

فاصله‌ی متحرک از مبدأ

بردار جابجایی



بردار جابجایی $\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$= (x_2 \vec{i} + x_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + x_1 \vec{j})$$

$$= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

بردار سرعت متوسط

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j}$$

$$\Longrightarrow |\vec{\bar{v}}| = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2}$$

مثال ۱: معادله‌ی مکان متحرک در SI بصورت $x = 30t$ و $y = -5t^2 + 40t + 20$ است. ۱) معادله‌ی بردار مکان متحرک را بنویسید و همچنین بردار مکان را برای لحظه‌ی $t = 2s$ مشخص کنید و در لحظه $t = 2s$ فاصله‌ی متحرک تا مبدأ را بدست آورید. ۲) بردار سرعت متوسط را برای ۲ ثانیه‌ی اول حرکت بدست آورده و همچنین اندازه‌ی آن را مشخص کنید. ۳) جابجایی متحرک در ۲ ثانیه‌ی اول چند متر است؟

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \longrightarrow \vec{r} = (30t)\vec{i} + (-5t^2 + 40t + 20)\vec{j}$

$\vec{r}_2 = 60\vec{i} + 80\vec{j}$

$|\vec{r}_2| = 100$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = \frac{60}{2}\vec{i} + \frac{80-20}{2}\vec{j} = 30\vec{i} + 30\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = 30\sqrt{2}\ m/s$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(30-0)^2 + (55-20)^2} = 5\sqrt{85}\ m$$

معادله مسیر: $t = \frac{x}{30} \Longrightarrow y = -\frac{1}{180}x^2 + \frac{4}{3}x + 20$

بردار سرعت لحظه‌ای

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

مثال ۲: در مثال ۱، مطلوب است: الف) معادلهٔ بردار سرعت و همچنین اندازهٔ سرعت اولیه متحرک ب) در لحظهٔ $t=2s$ جهت حرکت متحرک با جهت محور x چه زاویه‌ای را می‌سازد؟ ج) کمترین مقدار سرعت این متحرک چند m/s است و در چه لحظه‌ای و در چه مکانی سرعت به این حداقل می‌رسد؟

$\vec{v} = 30\vec{i} + (-10t + 40)\vec{j} \longrightarrow v_{\text{اولیه}} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$

$\vec{v}_2 = 30\vec{i} + 20\vec{j} \qquad \tan\alpha = \frac{2}{3} \qquad \alpha = \operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$

$|\vec{v}| = \sqrt{30^2 + (-10t + 40)^2} \qquad v \geq 30\ m/s \qquad -10t + 40 = 0 \longrightarrow t = 4s \longrightarrow \begin{cases} x = 120m \\ y = 100m \end{cases}$

بردار شتاب متوسط

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) - (v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j})}{\Delta t} = \frac{(v_x - v_{0x})}{\Delta t} \vec{i} + \frac{(v_y - v_{0y})}{\Delta t} \vec{j}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\bar{a}_x)^2 + (\bar{a}_y)^2}$$

مثال: در مثال ۱، الف) بردار شتاب متوسط را در ۲ ثانیه اول حساب کنید. ب) بردار شتاب را در لحظه‌ی $t = 5$ ثانیه را بدست آورید.

$$v_x = 30 \qquad a_x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = (30t)\vec{i} + (-5t^2 + 40t + 20)\vec{j} \\ \vec{v} = 30\vec{i} + (-10t + 40)\vec{j} \\ \vec{a} = 0\vec{i} - 10\vec{j} \end{cases} \quad \begin{matrix} t = 0 & \vec{v}_0 = 30\vec{i} + 40\vec{j} \\ t = 2 & \vec{v} = 30\vec{i} + 20\vec{j} \end{matrix} \qquad \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{-20}{2}\vec{j} = -10\vec{j}$$

$$v_y = -10t + 40 \qquad a_y = -10$$

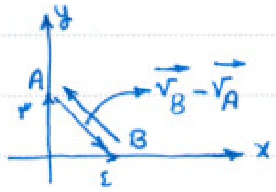
$$v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

بردار شتاب لحظه‌ای

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

نکته: اگر متحرک در مسیر مستقیم نصف مسافت را با سرعت v_1 و نیمه‌ی دوم را با سرعت v_2 طی کند: $\bar{v} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$

اگر متحرک نصف زمان حرکت را با v_1 و نیمه‌ی دوم را با v_2 حرکت کند. $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$



سرعت B نسبت به A $= \vec{v}_B - \vec{v}_A$

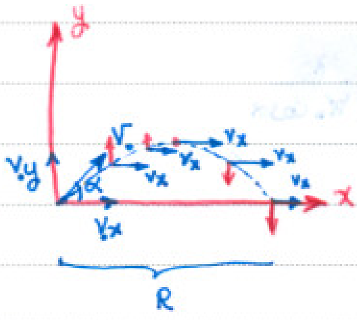
سرعت A نسبت به B $= \vec{v}_A - \vec{v}_B$

جابجایی در t ثانیه‌ی nام $\Delta x = \left[\frac{1}{2} a (nt)^2 + v_0 (nt) + x_0\right] - \left[\frac{1}{2} a ((n-1)t)^2 + v_0 (n-1)t + x_0\right]$

$$= a n t^2 - \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = \frac{1}{2} a t^2 (2n - 1) + v_0 t$$

حرکت پرتابی

فرض، گلوله‌ای با سرعت اولیه V_0 در جهتی که با سطح افق زاویه‌ی α می‌سازد رو به بالا پرتاب می‌شود.



سرعت‌های اولیه:

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha \xrightarrow{\text{سرعت در راستای افق یکنواخت}} V_x = V_{0x} \Rightarrow V_x = V_0 \cos\alpha$$

معادله‌های سرعت

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha \xrightarrow[\text{در راستای قائم حرکت با شتاب ثابت}]{\text{سرعت در راستای عمودی تند/کند شونده}} V_y = -gt + V_{0y} \Rightarrow V_y = -gt + V_0 \sin\alpha$$

$$x = V_x t \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t \quad \Rightarrow \begin{cases} x = V_0 (\cos\alpha) t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 (\sin\alpha) t \end{cases}$$

معادله‌های مکان

زمان رسیدن به ارتفاع اوج (T):

$$V_y = 0 \Rightarrow t = T \Rightarrow 0 = -gt + V_0 \sin\alpha \Rightarrow T = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

ارتفاع اوج (H):

$$V_y^2 - V_{0y}^2 = -2g(\Delta y)$$

$$\Rightarrow 0 - V_0^2 \sin^2\alpha = -2g(H) \Rightarrow H = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$V_{0y} = 0 \Rightarrow \Delta y = H$$

برد گلوله (R): در معادله‌ی x به جای t، $2T$ قرار می‌دهیم.

$$t = 2T \Rightarrow x = R \qquad x = V_0 (\cos\alpha)\left(\frac{2V_0 \sin\alpha}{g}\right) \Rightarrow \frac{2V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = R$$

$$\Rightarrow R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

زاویه‌های متمم دارای برد یکسان هستند.

زاویه‌ی ۴۵° دارای بیشترین برد است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

معادله مسیر پرتابه: در معادله‌های مکان t را حذف می‌کنیم.

$$x = v_0 \cos\alpha \, t \longrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin\alpha) t \longrightarrow y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 (\sin\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

PAPCO

فصل دوم: دینامیک

قانون های نیوتن

۱- قانون اول نیوتن: اگر جسمی نیرو وارد نشود جسم به وضع خودش می ماند یعنی اگر ساکن باشد به حال سکون می ماند و اگر متحرک باشد با سرعت ثابت و در مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه می دهد.

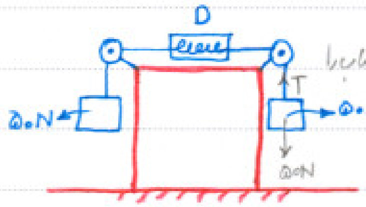
۲- قانون دوم نیوتن: اگر به جسم نیرو وارد شود جسم شتاب می گیرد که شتاب با نیرو متناسب است و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \longrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ برآیند نیروهایی است که به یک جسم وارد می شود.

$a \to m/s^2$ ، $m \to kg$ ، $F \to \frac{kg\,m}{s^2} = N$

۳- قانون سوم نیوتن: اگر جسم A به جسم B نیرو وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیرو وارد می کند، به همان اندازه‌ی نیروی قبلی و در خلاف جهت.

مثال: در شکل مقابل نیروسنج چند نیوتن را نشان می دهد؟ ۵۰N



* نیروسنج نیروی کشش طناب را نشان می دهد

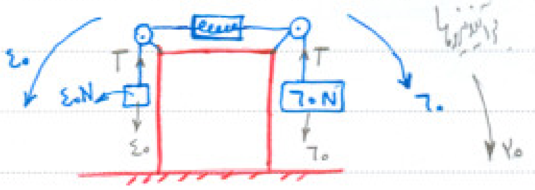
۱) ۱۰۰
۲) ۵۰ ✓
۳) صفر
۴) ۲۵

* برآیند نیروی وارد بر نیروسنج صفر است.

* می تواند برآیند نیروها صفر باشد ولی: ⟶‖⟵

⟵〰⟶: کشیده شود یا فنر پاره گردد...

مثال: در شکل مقابل نیروسنج چند نیوتن را نشان می دهد؟



۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۴۸ ✓
۴) ۵۸

برآیند کل: $F = Ma$

$۲۰ = (۴+۶)a \longrightarrow a = ۲\, m/s^2$

$T - ۴۰ = ma$

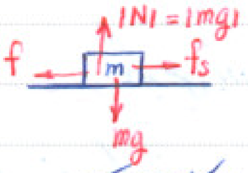
$F = ma$

$۶۰ - T = ۶ \times ۲ \longrightarrow T = ۴۸N$

$T < ۶۰$: برآیند نیروها به سمت پایین

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نیروی اصطکاک ← نیروی اصطکاک ایستایی (F_s)، نیروی اصطکاک جنبشی (F_k)

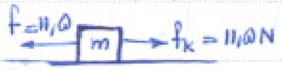


$0 \leq f_s \leq f_{s\,max}$

نیروی اصطکاک آستانه حرکت ← $f_{s\,max} = \mu_s . N$

ضریب اصطکاک ایستایی — نیروی عمود بر سطح

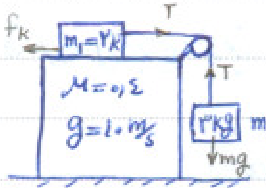
تذکر: نیروی اصطکاک ماهیت الکتریکی دارد و بین اتم‌ها و مولکول‌های دو سطح ایجاد می‌شود و این نیرو با سطح واقعی تماس دو جسم متناسب است و چون سطح واقعی تماس با N متناسب است، پس نیروی اصطکاک نیز با N متناسب است.



$F_k = \mu_k . N \qquad F_k < f_{s\,max} \longrightarrow \mu_k < \mu_s$

چون پیوند اتم‌ها در حرکت کمتر است.

مثال: در شکل مقابل سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و بعد از 2s نخ پاره می‌شود. مطلوبست: الف) کل مسافتی که وزنه m_1 طی می‌کند تا بایستد؟ ب) در مدتی که وزنه m_1 در حرکت است وزنه m_2 چه مسافتی را می‌پیماید؟



$T - f_k = m_1 a$

$m_2 g - T = m_2 a \longrightarrow m_2 g - f_k = (m_1 + m_2) a$

$\frac{30 - 8}{5} = a \longrightarrow a = 4.4$

$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} . 4.4 \times 4 = 8.8m = \Delta y_1$

$v = at = 4.4 \times 2 = 8.8 = v_0$ در لحظه باز شدن

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2$

بعد از باز شدن چتر: $f_{k_1} = ma \Rightarrow 8 = 2a \longrightarrow a' = 4\,m/s^2$ $\quad -8.8^2 = -2(4)\cdot\Delta x_2 \quad \Delta x_2 = 9.68m$

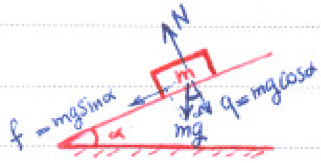
$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$\Delta t_2 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 8.8}{-4} = 2.2s \qquad \Delta y_2 = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times 10 \times 2.2^2 + 8.8 \times 2.2$

$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$

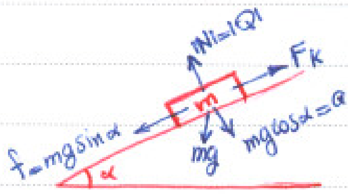
حرکت در سطح شیب‌دار

الف) سطح بدون اصطکاک:



$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_x = f = \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a \longrightarrow \boxed{a = g\sin\alpha}$

ب) سطح دارای اصطکاک: ۱) جسم رو به پایین می‌آید.



$F_{\text{برآیند}} = mg\sin\alpha - F_k = ma$

$\cancel{m}g\sin\alpha - \cancel{m}g\cos\alpha\,\mu_k = \cancel{m}a \longrightarrow \boxed{a = g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha}$

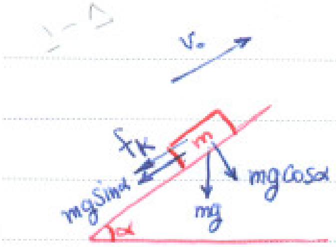
نتیجه: اگر حرکت یکنواخت باشد $a=0$ ، $g\sin\alpha = \mu_k g\cos\alpha \longrightarrow \mu_k = \tan\alpha$

در آستانه حرکت ←
زاویه‌ای که تحت آن جسم شروع به حرکت می‌کند.

$F_{s\max} = mg\sin\beta \longrightarrow \mu_s \cancel{m}g\cos\beta = \cancel{m}g\sin\beta \longrightarrow \mu_k < \mu_s \longrightarrow \tan\alpha < \tan\beta \longrightarrow \alpha < \beta$

$\mu_s = \tan\beta$

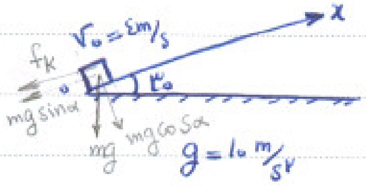
۲) جسم رو به بالا برود.



برآیند $F = mg\sin\alpha + F_k = ma$

$$\cancel{m}g\sin\alpha + \mu_k \cdot \cancel{m}g\cos\alpha = \cancel{m}a \longrightarrow a = g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha$$

مثال: وزنه‌ای به جرم ۴۰۰ گرم را با سرعت اولیه‌ی $4\,m/s$ از پایین سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد، مماس با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر ضریب اصطکاک $\frac{\sqrt{3}}{5}$ باشد، نمودارهای سرعت - زمان و مکان - زمان این متحرک را در فاصله‌ی زمانی رفت و برگشت آن رسم کنید.



$m = 0.4\,kg$

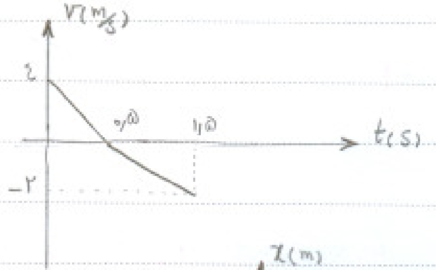
$v_0 = 4\,\frac{m}{s}$

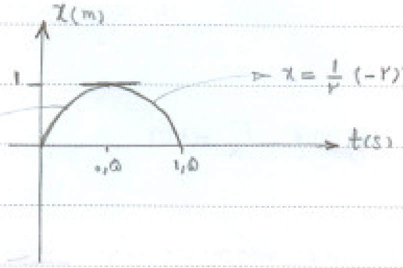
$v = at + v_0 \longrightarrow t = 0.5\,s$

بالا رفتن $a = g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha = 10 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 3 = 8\,\frac{m}{s^2}$ $\quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \longrightarrow \Delta y = \frac{-16}{-16} = 1$

پایین آمدن $a = g\sin\alpha + \mu_k g\cos\alpha = 5 - 3 = 2\,\frac{m}{s^2} \longrightarrow v^2 - \cancel{v_0^2} = 2a\Delta y \longrightarrow v = \sqrt{2 \times 2 \times 1} = -2\,\frac{m}{s}$

$v = at + \cancel{v_0} \quad \frac{-2}{-2} = t = 1s$





$x = \frac{1}{2}(-8)t^2 + 4t$

$0 \le t \le 0.5$

$x = \frac{1}{2}(-2)t^2 + 1$

مثال: نمودارهای مثال قبل را برای حالتی رسم کنید که ضریب اصطکاک $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد.

بالا رفتن $a = 12.5$ پایین آمدن $a = -2.5$

$$\cancel{v^2} - v_0^2 = 2a\Delta x \longrightarrow \Delta x = \frac{-16}{-2\times 12.5} = \frac{16}{25}$$

$$\underset{0}{\cancel{v}} = \underset{-12.5}{a}t + \underset{4}{v_0} \longrightarrow t = \frac{4}{12.5} = \frac{8}{25}$$

* سطح بدون اصطکاک فقط نیروی عمودی (عمود بر سطح) وارد می‌کند. مانند صابون

تکانه (اندازه حرکت): کمیتی است برداری که حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن است و آن را با $\vec{P}$ نشان می‌دهیم.

$$\underset{\frac{kg\,m}{s}}{\vec{P}} = \underset{kg}{m}\underset{m/s}{\vec{v}}$$

رابطه تکانه با قانون دوم نیوتن

قانون دوم نیوتن $\rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

مشتق v برحسب t $a \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\longrightarrow \vec{F} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d(\vec{v}m)}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

آهنگ تغییرات اندازه حرکت

* آهنگ تغییر تکانه‌ی یک جسم برابر است با برآیند نیروهای وارد بر آن جسم.

* تغییر تکانه در واحد زمان برابر است با متوسط نیروهای وارد بر آن جسم.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \longleftrightarrow \bar{\vec{F}} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

مثال: چکشی به جرم ۴۰۰g با سرعت ۲۰ m/s به میخی برخورد و با سرعت ۵ m/s به عقب برمی‌گردد. اگر زمان تماس چکش با میخ ۰٫۰۱ باشد، متوسط نیرویی که از طرف چکش به میخ وارد می‌شود چند نیوتن است؟

$v_1 = 20$ $v_2 = -5$

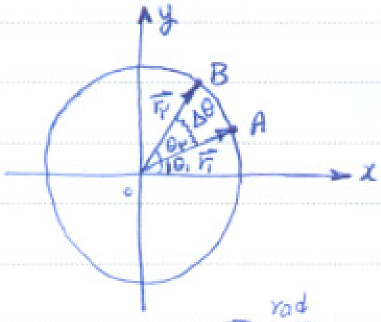
$$\bar{\vec{F}} = \frac{0.4(-5) - 0.4(20)}{0.01} = -1000\,N$$

نیرویی که به چکش وارد شده است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\vec{F}.\Delta t = \Delta P =$ ضربه

حرکت دایره‌ای:



متحرک در مدت Δt از A به B می‌رسد.

سرعت زاویه‌ای متوسط $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta \rightarrow rad}{\Delta t \rightarrow s}$ $\left(\frac{rad}{s}\right)$ $\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \Rightarrow \theta = \bar{\omega} t + \theta_0$

اگر حرکت روی دایره یکنواخت باشد: $\theta = \omega t + \theta_0$

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای

$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$

دوره (زمان تناوب) T_s: زمان یک دور کامل

بسامد (فرکانس) f: تعداد نوسان در واحد زمان

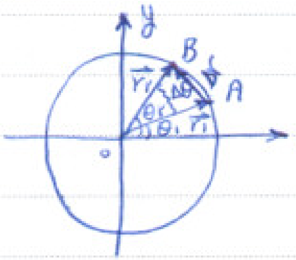
(هرتز) Hz (s^{-1})

$f = \frac{1}{T}$ یا $T = \frac{1}{f}$

مثال: سرعت زاویه‌ای عقربه‌ی ساعت‌شمار چند رادیان بر ثانیه است؟

$\omega = \frac{2\pi}{12 \times 3600} \frac{rad}{s}$

سرعت خطی در حرکت دایره‌ای

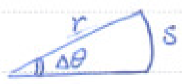


متحرک در مدت $\Delta\theta$ از A به B می‌رسد.

اندازه‌ی سرعت متوسط $V = |\vec{\bar{V}}| = \frac{|\Delta r|}{\Delta t}$

$V = |\vec{V}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$

تذکر ریاضی:



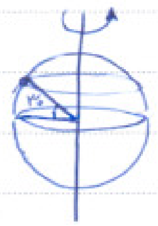
$$\overset{m}{S} = r \cdot \overset{rad}{\Delta\theta}$$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\theta$ خیلی کوچک باشد $\Rightarrow |\overrightarrow{\Delta r}| \approx \overset{\frown}{AB} = S$

$$\Rightarrow V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow V = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{V = r\omega}$$

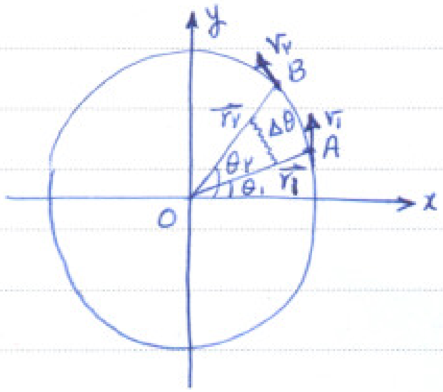
مثال: اگر طول عقربه‌ی ثانیه‌شمار یک ساعت دیواری ۶۰cm باشد اندازه‌ی سرعت خطی نوک این عقربه چند $\frac{cm}{s}$ است؟ $V = 60 \times \frac{2\pi}{60} = 2\pi$

مثال: اگر شعاع کره‌ی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنیم، در حرکت وضعی زمین سرعت خطی ساختمانی که روی خط استوا قرار دارد چند برابر سرعت خطی ساختمانی است که در عرض ۳۰ درجه‌ی شمالی قرار دارد، می‌باشد؟



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{6400}{6400\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت



$f \to \overset{\text{نو}}{V}$

$V = |\overrightarrow{V_1}| = |\overrightarrow{V_2}|$

$r = |\overrightarrow{r_1}| = |\overrightarrow{r_2}|$

اگر اضلاع دو زاویه برهم عمود باشند، آن دو زاویه یا برابرند و یا مکمل

$$a = |\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\overrightarrow{\Delta V}|}{\Delta t}$$

$$\overset{\Delta}{O'A'B'} \sim \overset{\Delta}{OAB} = \left\{\begin{matrix} V_1 = V_1 \\ V_2 = V_2 \\ \hat{O} = \hat{O}' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تشابه}} \text{متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \frac{|\overrightarrow{\Delta v}|}{|\overrightarrow{\Delta r}|} = \frac{|\overrightarrow{v_1}|}{|\overrightarrow{r_1}|} \Rightarrow |\overrightarrow{\Delta v}| = \frac{v}{r} \cdot |\overrightarrow{\Delta r}|$$

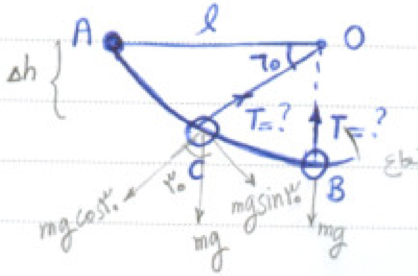
$$\Rightarrow a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{v}{r}|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \xleftrightarrow{r\omega = v} \underline{a = r\omega^2}$$ شتاب جانب مرکز یا شتاب مرکزگرا

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\theta$ خیلی کوچک می‌شود $\Rightarrow \Delta v \perp v_1 \Rightarrow a \to$ * در راستای شعاع و به سمت داخل مرکز دایره است.

دینامیک حرکت در مسیر دایره‌ای

$\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow f = ma$ نیروی جانب مرکز $\begin{cases} f = \frac{mv^2}{r} \\ \text{یا} \\ f = mr\omega^2 \end{cases}$

مثال: وزنه‌ای به جرم m را به نخی به طول l بسته‌ایم. یک سر نخ را از نقطه O ثابت کرده‌ایم و سر دیگر نخ را مطابق شکل به صورت افقی نگه داشته‌ایم وزنه را از حال سکون از نقطه A رها می‌کنیم. اندازه نیروی کشش نخ را در حالتی که وزنه از پایین‌ترین نقطه مسیر می‌گذرد حساب کنید.



$v_B^2 = 2lg$

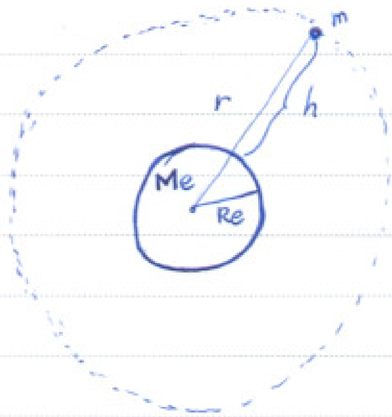
در راستای شعاع $f = \frac{mv_B^2}{l} \to T - mg = \frac{mv_B^2}{l} \to T = 3mg$

مثال: در مثال قبل در لحظه‌ای که گلوله بعد از حرکت ۶۰ درجه طی کرده باشد. اندازه نیروی کشش نخ چقدر است

$\Delta h = l\cos 30 = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 = \cancel{m}g\Delta h \to \frac{v_C^2}{2} = gl\frac{\sqrt{3}}{2} \to v_C^2 = gl\sqrt{3}$

$T - mg\cos 30 = \frac{mv_C^2}{l}$

حرکت ماهواره‌ها



$$r = R_e + h$$

نیروی جاذبه‌ی نیوتنی = نیروی مرکزگرای

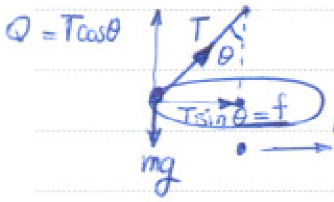
$$\frac{m v^2}{r} = G\frac{m M_e}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$mg = G\frac{m M_e}{R_e^2} \longrightarrow M_e = \frac{gR_e^2}{G} \longrightarrow v = R_e\sqrt{\frac{g}{r}}$$

دوره ماهواره

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{R_e\sqrt{\frac{g}{r}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

آونگ مخروطی



$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$ ← شعاع دایره

$$T\cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

مثال: در مثال قبل حداقل سرعت گلوله در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر چقدر باشد تا گلوله مسیر دایره‌ای کامل را در سطح قائم طی کند؟

$$\frac{m v_C^2}{l} = T + mg \longrightarrow v_C^2 = \frac{l}{m}T + lg$$

حداقل سرعت در C چقدر باشد تا دور بزند؟

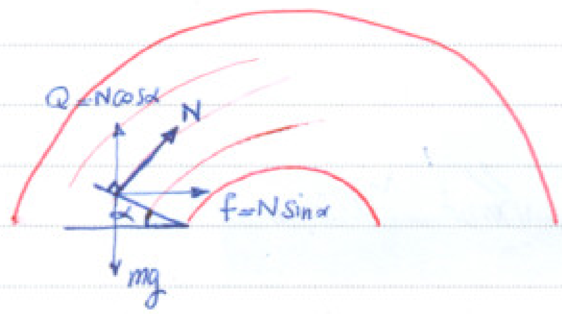
برای اینکه v_C حداقل باشد باید T صفر باشد

$$\frac{1}{2}m v_B^2 = \frac{1}{2}m v_C^2 + mg\,2l$$

$$v_B^2 = v_C^2 + 4gl$$

$$v_B^2 = lg + 4gl = 5lg \qquad v_B = \sqrt{5lg}$$

شیب عرضی پیچ جاده



$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$$

$$N\cos\alpha = mg \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v^2}{rg}$$

مثال: در شکل مقابل الف) بیشینه‌ی نیروی F چند N باشد تا جسم A روی جسم B نلغزد؟

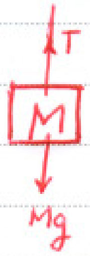
ب) اگر F مساوی 10N باشد شتاب حرکت هر یک از وزنه‌ها و نیروی اصطکاک سطح تماس دو وزنه؟

نیروی $F=50$ باشد شتاب حرکت هر یک از وزنه‌ها و نیروی بین دو جسم چیست؟

Subject:

Year. Month. Date.

حرکت آسانسور:



۱) و ۲) و ۳) : آسانسور ساکن است و یا با سرعت ثابت بالا یا پایین می رود $T=Mg$

۴) آسانسور با شتاب ثابت a تند شونده بالا می رود. $T>Mg \Rightarrow T-Mg=Ma \Rightarrow T=M(a+g)$

۵) آسانسور با شتاب ثابت a کند شونده بالا می رود $T<Mg \Rightarrow Mg-T=Ma \Rightarrow T=M(g-a)$

۶) آسانسور با شتاب ثابت a تند شونده پایین می آید $T<Mg \Rightarrow T=M(g-a)$

۷) آسانسور با شتاب ثابت a کند شونده پایین می رود $T>Mg \Rightarrow T=M(g+a)$